

Def 23.5: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} |Q_i| : (Q_i)_{i \in I} \right.$$

höchstens

abzählbare Überdeckung von A durch
abgeschlossene Quadrate Q_i $\left. \right\}$.

$\mathcal{L}^n =$ n -dim. Lebesgue Maß

Notation: $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$

$$|Q| := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

"Elementarinhalt"

Bemerkungen:

①.

$\mathcal{L}^n$ ist ein (äußeres) Maß auf $\mathbb{R}^n$

Beweis: wie für $n = 1$.

②. in der Def. kann man mit

offene Quadern

$$W := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

arbeiten, wenn man vereinbart

$$|W| := |\overline{W}|;$$

entsprechend: teilweise offene Quadern zulässig

③ Es gilt:

Für jedes $\delta > 0$ ist

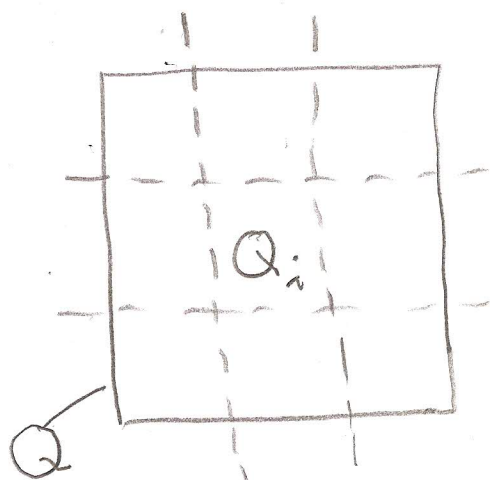
$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |Q_i| : \right.$$

$$\dots, \quad \underline{\text{diam } Q_i \leq \delta} \left. \right\},$$

und man kann Q_i durch Würfel
ersetzen (mit Kantenlänge $\leq \delta$)

Beweis: Man zerlege einen Quader Q (aus einer beliebigen Überdeckung) durch Schnitte mit achsenparallelen Hyper-ebenen in genügend kleine Teilquader $Q_1, \dots, Q_L$ und beachte

$$|Q| = \sum_{i=1}^L |Q_i|$$



④ Quader (offen, abgeschlossen, teilweise offen) $\implies \mathcal{L}^n(Q) = |Q|$

Beweis: analog zu Satz 23.1, (ii); dort ist $n = 1$.



Satz 23.6 : Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$

(i) $\mathcal{L}^n(A) = \inf \{ \mathcal{L}^n(\emptyset) : \emptyset \text{ offen } \supset A \}$

für alle $A \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathcal{L}^n$ ist ein Radon Maß, also

Borel-regulär und $\mathcal{L}^n(K) < \infty$ für
K kompakt.

(iii) Translationsinvarianz :

$$\mathcal{L}^n(\xi + A) = \mathcal{L}^n(A)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$$

(iv) Homogenität :

$$\mathcal{L}^n(\alpha A) = \alpha^n \mathcal{L}^n(A)$$

$$\forall \alpha \geq 0, A \subset \mathbb{R}^n$$

(v) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Tx := (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n).$$

Dann ist für $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\mathcal{L}^n(T(A)) = |\alpha_1 \cdots \alpha_n| \mathcal{L}^n(A)}$$

mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

(beachte: $\det T = \alpha_1 \cdots \alpha_n$)

Beweis: (i) Sei $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, sonst trivial! Zu $\varepsilon > 0$ wähle offene

Quader W_i , $i \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{cases} \varepsilon + \mathcal{L}^n(A) \gg \sum_{i=1}^{\infty} |W_i|, \\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i. \end{cases}$$

$\Rightarrow U := \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ offen mit

$$\begin{cases} U \supset A, & \mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_i) \\ & \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Bih.

(ii) Sei K kompakt $\Rightarrow \exists$ Quadrat Q
mit $K \subset Q$, d.h.

$$\mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(Q) = |Q| < \infty.$$

Noch zu zeigen:

- a) Borel Mengen sind $\mathcal{L}^n$ -messbar

b) $\mathcal{L}^n$ ist Borel regular

ad a): benutze „Caratheodory“

-232-

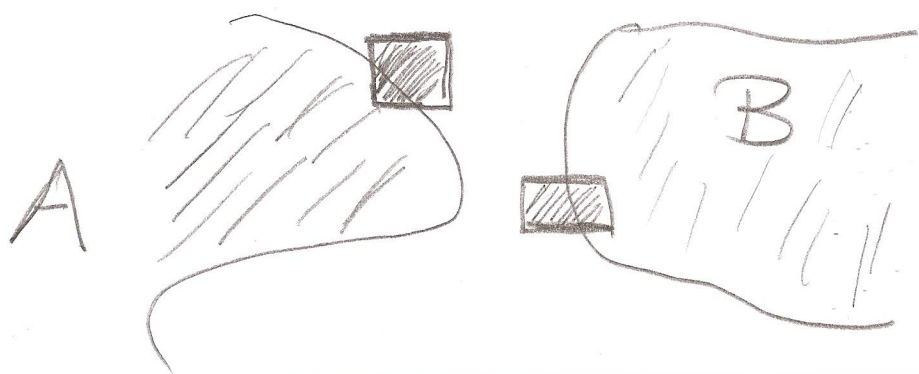
und zeige

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^n(A \cup B) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B), \\ \text{falls } \text{dist}(A, B) > 0. \end{array} \right.$$

(dabei o. E. $\mathcal{L}^n(A \cup B) < \infty$, sonst klar)

Seien $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben. Wähle Quadrate Q_i mit Kantenlänge $\leq \delta$ und

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \\ \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon \\ \text{und } \underline{\text{o. E.}} \quad Q_i \cap (A \cup B) \neq \emptyset \quad \forall i \end{array} \right.$$



δ klein genug $\xRightarrow{\text{dist}(A,B) > 0}$ -233-

entweder $Q_i \cap A = \emptyset$ oder $Q_i \cap B = \emptyset$
für jeden Quader;

setze

$$J_1 := \{i \in \mathbb{N} : Q_i \cap A \neq \emptyset\},$$

$$J_2 := \{ \dots \cap B \dots \},$$

also $\mathbb{N} = J_1 \cup J_2$ (disjunkt),

sowie

$$A \subset \bigcup_{i \in J_1} Q_i, \quad B \subset \bigcup_{i \in J_2} Q_i$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq$$

$$\sum_{i \in J_1} |Q_i| + \sum_{i \in J_2} |Q_i| \leq$$

$$\mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon; \quad \varepsilon \text{ beliebig} \implies$$

$$\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A \cup B).$$

ad b): finde zu $A \subset \mathbb{R}^n$ maßgleiche
Borel Obermenge!

Fall 1: $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ wähle $\mathbb{R}^n$

Fall 2: $\mathcal{L}^n(A) < \infty \implies$
(i)

$\exists U_k \text{ offen } \supset A \text{ mit } \mathcal{L}^n(U_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{L}^n(A);$

$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ist Borel Menge ($\supset A$)

und somit nach a) messbar; deshalb

ist $\mathcal{L}^n(B) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(U_k) =$

$\mathcal{L}^n(A)$. B ist massgleiche Obermenge zu A .

- 235 -

(iii) Q_i : Quaderüberdeckung von $A \Rightarrow$

$$\xi + Q_i \quad -||- \quad \xi + A_i;$$

außerdem: $|Q_i| = |\xi + Q_i|.$

(iv) Spezialfall von

(v) Übung!



Anmerkung: Mit (v) folgt (betrachte ^{O.E.} $c=0$ und wähle $\alpha_k=0$, alle anderen $\alpha_k=1$)

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\} \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\} \text{ und ein } c \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}^n(A) = 0$$

(niederdimensionale Mengen
haben $\mathcal{L}^n$ -Maß 0)

- 236 -

Satz 23.7: (Eindeutigkeit von $\mathcal{L}^n$)

Das Lebesgue Maß $\mathcal{L}^n$ ist das einzigste Maß λ auf $\mathbb{R}^n$ mit

(i) $\lambda(\xi + A) = \lambda(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n,$
 (Translationsinvarianz)

(ii) Q_1, Q_2 disjunkte Quadrate $\Rightarrow$
 $\lambda(Q_1 \cup Q_2) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2),$

(iii) $\lambda(A) = \inf \{ \lambda(O) : O \text{ offen } \supset A \},$

(iv) $\lambda([0, 1]^n) = 1.$

Bem: (i) - (iii) legen $\mathcal{L}^n$ bis auf einen Faktor $\alpha \geq 0$ fest, (iv) liefert $\alpha = 1.$

Beweis: Federer, p. 134 unten;
Grüter, Satz 11, p. 59

Idee:

- zeige $\lambda(Q) = \mathcal{L}^n(Q)$
für Quader Q
- zeige ^{damit} $\lambda(U) = \mathcal{L}^n(U)$
für offene Mengen U
- mit (iii) folgt dann
 $\mathcal{L}^n = \lambda$

↑ Lektion
~~14~~
15